

试卷代号:1080

座位号

--	--

国家开放大学(中央广播电视大学)2016年春季学期“开放本科”期末考试

工程数学(本) 试题(半开卷)

2016年7月

题 号	一	二	三	四	总 分
分 数					

得 分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. 设 A 为 n 阶方阵,则下列命题中不正确的是().
- A. 若 $\lambda=0$ 是 A 的一个特征值,则 $AX=O$ 必有非零解
- B. A 与 A' 有相同的特征值
- C. A 相应于不同特征值的特征向量是线性无关的
- D. A 与 $2A$ 有相同的特征值
2. 设 A, B 都是 n 阶方阵,则下列等式中正确的是().
- A. $AB=BA$
- B. $(AB)'=A'B'$
- C. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
- D. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

3. 线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases}$$
 的解的情况是 ().

- A. 只有零解
- B. 有唯一非零解
- C. 有无穷多解
- D. 无解
4. 若事件 A 与 B 互斥, 则下列等式中正确的是().
- A. $P(A+B)=P(A)+P(B)$
- B. $P(B)=1-P(A)$
- C. $P(A)=P(A|B)$
- D. $P(AB)=P(A)P(B)$
5. 若随机变量 $X \sim N(0,1)$, 则随机变量 $Y=3X-2 \sim$ ().
- A. $N(-2,3)$
- B. $N(-2,3^2)$
- C. $N(-4,3)$
- D. $N(-4,3^2)$

得 分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

6. 设 A, B 是 3 阶方阵, 其中 $|A|=2, |B|=-3$, 则 $|3A'B^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和非零 n 维向量 X , 使得 _____, 则称 X 为 A 相
特征值 λ 的特征向量.

8. 若 $P(A)=0.8, P(\overline{A}B)=0.3$, 则 $P(AB)=$.

9. 设随机变量 $X \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.2 & a & 0.5 \end{bmatrix}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 若参数 θ 的两个无偏估计量 θ_1 和 θ_2 满足 _____, 则称 θ_1 比 θ_2 更有效.

得 分	评卷人

三、计算题(每小题 16 分,共 64 分)

11. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $AX=B$, 求 X .

12. 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -2x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

的通解.

13. 设 $X \sim N(3, 4)$, 试求: (1) $P(5 < X < 9)$; (2) $P(X > 7)$. (已知 $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9772$, $\Phi(3) = 0.9987$)

14. 某厂生产日光灯管. 根据历史资料, 灯管的使用寿命 X 服从正态分布 $N(1600, 70^2)$. 在最近生产的灯管中随机抽取了 49 件进行测试, 平均使用寿命为 1520 小时. 假设标准差没有改变, 在 0.05 的显著性水平下, 判断最近生产的灯管质量是否有显著变化. ($u_{0.975} = 1.96$)

得 分	评卷人

四、证明题(本题 6 分)

15. 证明: 可逆的对称矩阵的逆矩阵是对称矩阵.

试卷代号:1080

国家开放大学(中央广播电视大学)2016年春季学期“开放本科”期末考试

工程数学(本) 试题答案及评分标准(半开卷)

(供参考)

2016年7月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. D 2. C 3. D 4. A 5. B

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. -18
7. $AX=\lambda X$
8. 0.5
9. 0.3
10. $D(\theta_1) < D(\theta_2)$

三、计算题(每小题16分,共64分)

11. 解:利用初等行变换可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{因此, } A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \dots\dots(10 \text{ 分})$$

于是,由矩阵乘法可得

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad \dots\dots(16 \text{ 分})$$

12. 解: 将方程组的增广矩阵化为阶梯形

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 7 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{方程组的一般解为} \begin{cases} x_1 = 1 + 5x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases} \quad (\text{其中 } x_4 \text{ 为自由元}). \quad \dots\dots(7 \text{ 分})$$

令 $x_4 = 0$, 得到方程组的一个特解 $X_0 = (1 \ 0 \ 0 \ 0)'$. \dots\dots(10 \text{ 分})

不计最后一列, 令 $x_4 = 1$, 得到相应的齐次线性方程组的一个基础解系

$$X_1 = (5 \ 1 \ -1 \ 1)' \quad \dots\dots(13 \text{ 分})$$

于是, 方程组的通解为 $X = X_0 + kX_1$ (其中 k 为任意常数). \dots\dots(16 \text{ 分})

$$\begin{aligned} 13. \text{ 解: } (1) P(5 < X < 9) &= P\left(\frac{5-3}{2} < \frac{X-3}{2} < \frac{9-3}{2}\right) = P\left(1 < \frac{X-3}{2} < 3\right) \\ &= \Phi(3) - \Phi(1) = 0.9987 - 0.8413 = 0.1574 \quad \dots\dots(8 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) P(X > 7) &= P\left(\frac{X-3}{2} > \frac{7-3}{2}\right) = P\left(\frac{X-3}{2} > 2\right) = 1 - P\left(\frac{X-3}{2} \leq 2\right) \\ &= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228 \quad \dots\dots(16 \text{ 分}) \end{aligned}$$

14. 解: 零假设 $H_0: \mu = 1600$; $H_1: \mu \neq 1600$.

由于标准差没有改变, 故已知 $\sigma_0^2 = 70^2$, 选取样本函数

$$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad \dots\dots(5 \text{ 分})$$

由已知, $\bar{x} = 1520$, $\mu_0 = 1600$, $\sigma_0 = 70$, $n = 49$, 于是得

$$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = \frac{1520 - 1600}{70 / \sqrt{49}} = -8 \quad \dots\dots(10 \text{ 分})$$

在 0.05 的显著性水平下, $\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right| = 8 > 1.96$, 因此拒绝零假设 H_0 , 即最近生产的灯管质量出现显著变化.(16 分)

四、证明题(本题 6 分)

15. 证明: 设 A 为可逆的对称矩阵, 则由矩阵的运算性质可得

$$(A^{-1})' = (A')^{-1} \quad \text{.....(3 分)}$$

又 A 为对称矩阵, 故 $A' = A$, 从而

$$(A^{-1})' = A^{-1}$$

因此, A^{-1} 也是对称矩阵.(6 分)